מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

23.11.2020

<u>האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס התשפ"א</u>

<u>הערות כלליות:</u>

השאלון הוא בן שבע שאלות.

משך הזמן לכתיבת הפתרונות הוא חמש שעות.

על כל המשתתפות\ים לנהוג על פי נהלי התחרות, ולמלא הצהרת טוהר האולימפיאדה.

שאלה 1. סופי רשמה על הלוח את כל המספרים מ-1 עד 1000 (כולל).

א. איזו ספרה רשמה סופי על הלוח הכי הרבה פעמים?

ב. איזו ספרה רשמה סופי על הלוח הכי מעט פעמים?

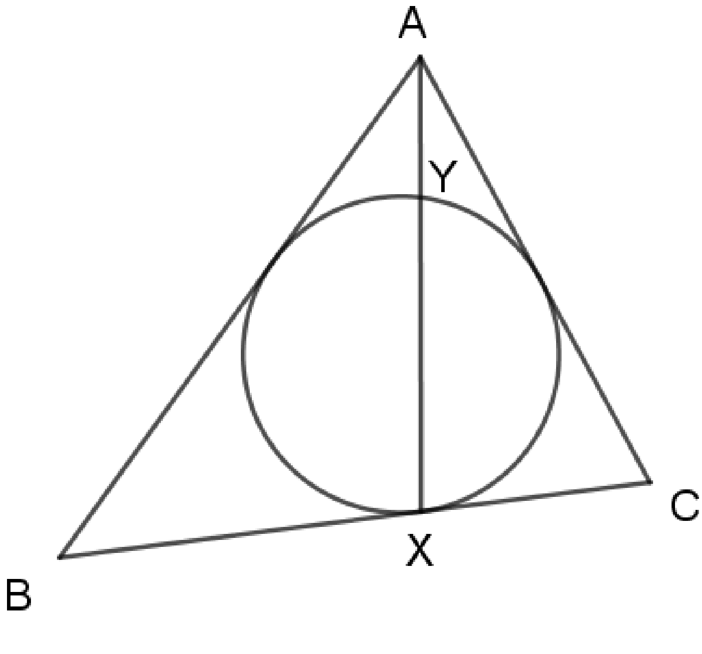
שאלה 2. האם קיימת סדרה אינסופית של ראשוניים, $p_1, p_2, p_3, \ldots$.

המקיימת, לכל n, את היחס: $p_{n+1} = 2p_n + 1$?

שאלה 3. יהא ABC משולש.

נסמן ב- X את נקודת ההשקה של המעגל החסום בו עם הקטע BC.

נסמן ב- Y את נקודת החיתוך השנייה של הקטע AX עם המעגל החסום.



הוכיחו ש:

$$AX + AY + BC > AB + AC$$

שאלה 4.

דני אוהב מספרים בעלי שבע ספרות שלא כוללים את הספרה 0, ושיש להם את התכונה הבאה: ספרת האחדות של המספר מתחלקת בספרת העשרות שלו, ספרת העשרות מתחלקת בספרת המאות, וכן הלאה.
לדוגמא, דני אוהב את המספר 1133366, אבל לא אוהב את המספר 9999993.

האם כמות המספרים אותם דני אוהב מתחלקת ב-7?

שאלה 5.

פתרו את המשוואה-

$$(2a+1)(2a^2+2a+1)(2a^4+4a^3+6a^2+4a+1)=828567056280801,$$

כאשר a מספר חיובי.

שאלה 6.

בתחרות טניס השתתפו 21 שחקניות, כל זוג שחקניות שיחקו משחק אחד בדיוק האחת נגד השניה ואחת מהן ניצחה (אין תיקו).

מארגני התחרות גילו שכל שחקנית ניצחה לפחות ב-9 משחקים, והפסידה לפחות ב-9 משחקים. בנוסף הם גילו שהיו מקרים של שלוש שחקניות כך שא' ניצחה את ב', ב' ניצחה את ג', וג' ניצחה את א', הם קראו לשלשות כאלה בעייתיות.

א. מה המספר המקסימלי של שלשות בעייתיות שיכולות להיות?

ב. מה המספר המינימלי של שלשות בעייתיות שיכולות להיות?

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

שאלה 7.

נתון משולש ABC.

המעגל ω שמרכזו I משיק בנקודות D,E,F לצלעות BC,AC,AB בהתאמה.

כשמסובבים את המשולש ABC ב- 180° סביב הנקודה I, מתקבל המשולש A'B'C'.

הקטעים AD ו-B'C' נחתכים בנקודה U, הקטעים BE ו-A'C' נחתכים בנקודה V, והקטעים CF ו-A'B' נחתכים בנקודה W.

הקטע BC חותך את הקטעים A'C' ו-A'B' בנקודות D_1 ו- D_2 בהתאמה,

הקטע AC חותך את הקטעים A'B' ו-B'C' בנקודות E_1 ו- E_2 בהתאמה,

והקטע AB חותך את הקטעים B'C' ו-A'C' בנקודות F_1 ו- F_2 בהתאמה.

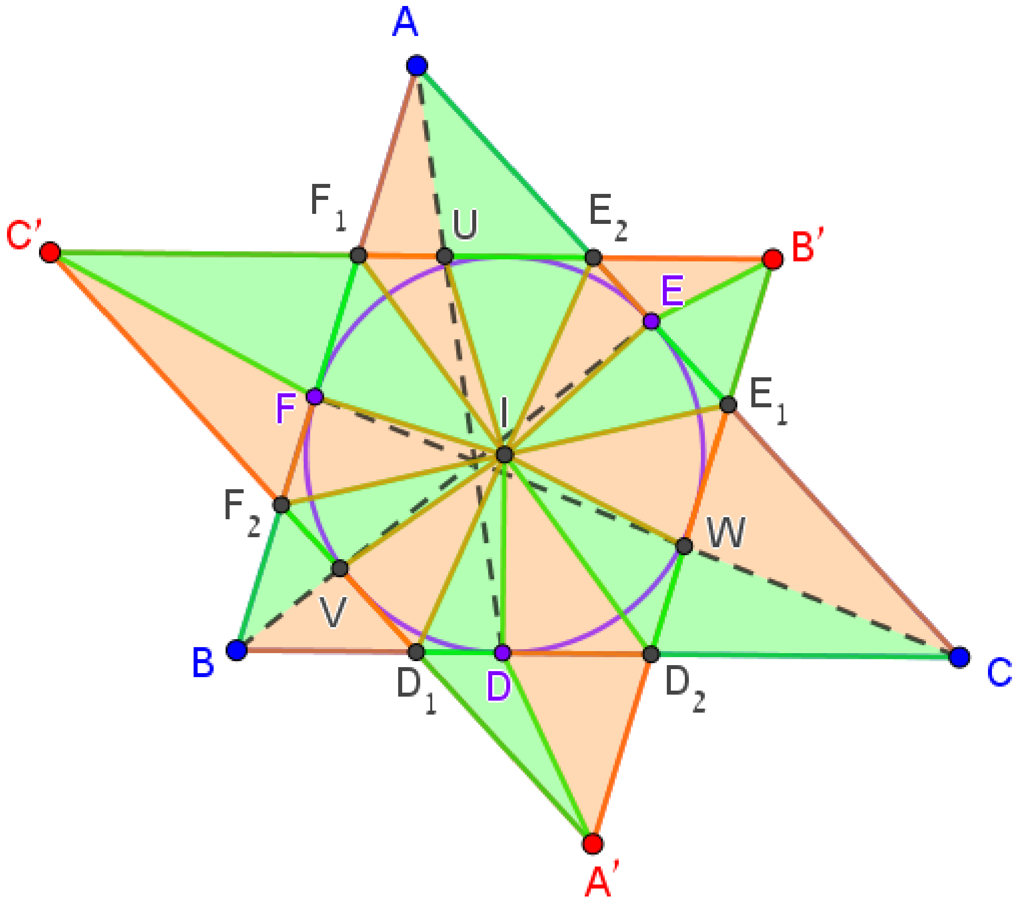
שישה מרובעים (לאו דווקא קמורים) נצבעו בכתום:

$$AUIF_1,\ C'FIF_2,\ BVID_1,\ A'DID_2,\ CWIE_1,\ B'EIE_2$$

שישה מרובעים נוספים (לאו דווקא קמורים) נצבעו בירוק:

$$AUIE_2,\ C'FIF_1,\ BVIF_2,\ A'DID_1,\ CWID_2,\ B'EIE_1$$

הראו שסכום השטחים הירוקים שווה לסכום השטחים הכתומים.



__בהצלחה!__